CUASIANALITICIDAD EN CLASES DE FUNCIONES DIFERENCIABLES DE CUADRADO SUMABLE

por

J. Bruna

λ designará espacio normal de sucesiones. En analogía con

$$E^{\lambda}(\mathbb{R}) = \{f \in C^{\infty}(\mathbb{R});\ f^{(n)} \text{ es acotada y } (\|f^{(n)}\|_{\infty})_n \in \lambda\}$$

definimos la clase

$$D^{\lambda}(\mathbb{R}) = \{f \in C^{\infty}(\mathbb{R});\ f^{(n)} \in L(\mathbb{R}) \text{ y } (\|f^{(n)}\|_2)_n \in \lambda\}.$$

La clase $D^{\lambda}(\mathbb{R})$ se llamará cuasianalítica si $f \in D^{\lambda}(\mathbb{R})$ y $f^{(n)}(c)=0$ $n=0,1,2,\ldots$ implican $f \equiv 0$. Nos proponemos encontrar caracterizaciones de la cuasianaliticidad de la clase $D^{\lambda}(\mathbb{R})$.

La no cuasianaliticidad de la clase $D^{\lambda}(\mathbb{R})$ equivale a la existencia de $f \in D^{\lambda}(\mathbb{R})$ con $f(t)=0$ si $t \leq 0$ y $f \neq 0$. Un teorema de Paley-Wiener establece que la transformación de Fourier-Laplace es una isometría entre $L^2(0,\infty)$ y el espcacio $H^2(\pi^+)$ de las funciones holomorfas en el semiplano π^+ de los $z \in \mathbb{C}$ con

Re $z > 0$ que verifican

$$\sup_{0<x<\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy)|^2 \, dy = C < \infty$$

con norma $\|F\|_2^2 = C$.

Aquí vamos a ver cómo es F si tomamos f en $D^{\lambda}(\mathbb{R})$. Empezemos por tomar $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, nula para $t \leq 0$, y tal que $f^{(n)} \in L^2$. Ponemos

$$F_n(z) = \int_0^{\infty} f^{(n)}(t) \, e^{-tz} \, dt. \quad F_n \in H^2(\Pi^+), \; n = 0,1,\ldots$$

Veamos que $F_n(z) = z^n F(z)$. Por inducción, basta verlo para $n = 1$. Una integración por partes da

$$F_1(z) = f(t)e^{-tz} \Big]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} f(t)e^{-tz} \, dt.$$

Como f está acotada, se deduce $F_1(z) = zF(z)$. Recíprocamente, supongamos que $z^n F(z) \in H^2(\Pi^+)$, $n = 0,1,\ldots$ El teorema de Paley-Wiener dice que $z^n F(z)$ es la transformada de Fourier-Laplace de una $f_n \in L^2(0,\infty)$ con $\|f_n\|_2 = \|z^n F\|_2$. Vamos a ver que f_0 está definida por todo, que $f_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$ y que $f_0^{(n)} = f_n$

$$f_0(t) = \frac{e^{tx}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x+iy)\, e^{ity}\, dy$$

Para lo primero basta ver pues que $F_x(y) = F(x+iy)$ está en L^1 para $x > 0$. Pero

$$F_x(y) = F(x+iy) = \frac{1}{x+iy} F(x+iy)(x+iy)$$

es el producto de $y \to \frac{1}{x+iy}$ y $y \to F(x+iy)(x+iy)$. La primera tiene cuadrado $\frac{1}{x^2+y^2}$, integrable, y la segunda está en L^2 por hipótesis.

Por tanto,

$$f_0(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma F(z) e^{tz}\, dz$$

está definida para todo t. Puesto que $z^n F$ verifica las mismas condiciones, también

$$f_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma F(z) z^n e^{tz}\, dz$$

está definida para todo t. Comparando, se deduce que $f_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$ y que $f_0^{(n)} = f_n$.

Se ha demostrado pues la siguiente variante del teorema de Paley-Wiener:

" Sea $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, nula para $t \leq 0$, y tal que $f^{(n)} \in L^2$, $n = 0,1,\ldots$ Se define

$$F(z) = \int_0^\infty f(t) e^{-tz}\, dt, \text{para } \operatorname{Re} z > 0$$

Entonces $z^n F(z) \in H^2(\pi^+)$ $n = 0,1,\ldots$ y $\|z^n F\|_2 = \|f^{(n)}\|_2$. Recíprocamente, si F es holomorfa en π^+ y $z^n F(z) \in H^2(\pi^+)$, $n = 0,1,\ldots$ existe $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, nula para $t \leq 0$, y tal que $f^{(n)} \in L^2$, $n = 0,1,\ldots$ y F es la transformada de Fourier-Laplace de f "

Especializando a funciones de $D^\lambda(\mathbb{R})$, se tiene

Teorema 1. La clase $D^{\lambda}(\mathbb{R})$ no es cuasianalítica si y sólo si existe una función F holomorfa en π^{+} tal que $z^{n} F \in H^{2}(\pi^{+})$ $n=0,1,\ldots$ y $(\|z^{n} F\|_{2})_{n} \in \lambda$.

Nos proponemos encontrar ahora otro tipo de condición para la no cuasianaliticidad de la clase $D^{\lambda}(\mathbb{R})$. Buscaremos la imagen $\hat{D}^{\lambda}(\mathbb{R})$ de $D^{\lambda}(\mathbb{R})$ por la transformación de Fourier-Plancherel. La caracterización de $\hat{D}^{\lambda}(\mathbb{R})$ se basa en el siguiente lema, de sencilla demostración.

Lema. Sea $f \in L^{2}(\mathbb{R})$, $\hat{f}$ su transformada de Fourier-Plancherel. Las condiciones siguientes son equivalentes:

(a) f está definida por todo, $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ y $f^{(n)} \in L^{2}(\mathbb{R})$ $\forall n$.

(b) $\forall n$, $t^{n} \hat{f} \in L^{2}(\mathbb{R})$

En tal caso $\widehat{f^{(n)}} = (it)^{n} \hat{f}$

Se obtiene la caracterización

$$\hat{D}^{\lambda}(\mathbb{R}) = \{f \in L^{2}(\mathbb{R}) \ / \ t^{n} f \in L^{2}(\mathbb{R}),\ n=0,1,\ldots \text{ y } (\|t^{n} f\|_{2})_{n} \in \lambda\}.$$

y para plantear la no cuasianaliticidad en estos términos necesitamos saber cómo es $\hat{f}$ si $f \in D^{\lambda}(\mathbb{R})$ es nula par $t \leq 0$.

Para ello usamos la siguiente proposición que ya está enunciada en [1]:

Proposición 1.- sea $\Phi \in L^{2}(\mathbb{R})$, $\Phi \geq 0$ c.p.t. Una condición necesaria y suficiente para que exista $f \in L^{2}(0,\infty)$ tal que

$$|\hat{f}| = \Phi \quad \text{es que} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\log \Phi(t)|}{1+t^{2}}\, dt < \infty$$

Para la demostración basta enunciar la proposición en términos de la transformada de Laplace F de f. Se sabe que $\hat{f}$ coincide con la función F^{*}, definida casi por todo a partir de F por $F^{*}(y) = \lim_{x \to 0} F(x+iy)$ (Fatou). Resulta lo siguiente: "para $\Phi \in L^{2}$, $\Phi \geq 0$ c.p.t., una condición necesaria y suficiente para que exista $F \in H^2(\pi^+)$ tal que $|F^*| = \Phi$ es que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\log \Phi(t)|}{1+t^2}\, dt < \infty$ "

Enunciado así, no es más que una conocida propiedad del espacio $H^2(\pi^+)$ (ver [2]).

Supongamos ahora que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $f^{(n)} \in L^2(\mathbb{R})$ $n = 0,1,\ldots$ y $f(t) = 0$ para $t \leq 0$. Entonces $\Phi = |\hat{f}|$ verifica $t^n\Phi \in L^2(\mathbb{R})$ y $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\log \Phi(t)|}{1+t^2}\, dt < \infty$. Recíprocamente, si Φ verifica estas condiciones, la proposición 1 da una $f \in L^2(0,\infty)$ tal que $|\hat{f}| = \Phi$ y puesto que $t^n\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$, se puede tomar, por el lema, f de clase C^∞ con todas las derivadas en L^2. Por tanto, se tiene

Proposición 2.- Sea $\Phi \in L^2(\mathbb{R})$, $\Phi \geq 0$ c.p.t. Para que exista $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, nula par $t \leq 0$, con todas las derivadas en L^2 y tal que $|\hat{f}| = \Phi$ es condición necesaria y suficiente que $t^n\Phi \in L^2(\mathbb{R})$, $n = 0,1,\ldots$ y $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\log \Phi(t)|}{1+t^2}\, dt < \infty$

De aquí se puede deducir la caracterización de la no cuasianaliticidad de $D^\lambda(\mathbb{R})$ que se buscaba:

Teorema 2.- La clase $D^\lambda(\mathbb{R})$ no es cuasianalítica si y sólo si existe $\Phi \geq 0$ c.p.t. tal que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\log \Phi(t)|}{1+t^2}\, dt < \infty$, $t^n\Phi \in L^2(\mathbb{R})$ $n = 0,1,\ldots$ y $(\|t^n\Phi\|_2)_n \in \lambda$.

Este último teorema servirá para dar una caracterización de la cuasianaliticidad de la clase $D^\lambda(\mathbb{R})$ sin salirse del espacio λ.

Teorema 3.- La clase $D^\lambda(\mathbb{R})$ no es cuasianalítica si y sólo si existe $v = (v_n) \in \lambda$ tal que, si $T_v(r) = \sup \frac{r^n}{v_n}$, $r \geq 0$, es

$$\int_1^\infty \frac{\log T_v(r)}{r^2}\, dr < \infty .$$

Para la demostración del teorema, supongamos que $D^{\lambda}(\mathbb{R})$ no es cuasianalítica y sea Φ como en el teorema 2. Tomemos $v_n = \|t^n\Phi\|_2$ y pasemos a comprobar la divergencia de la integral:

$$\log \frac{r^n}{v_n} = -\frac{1}{2} \log \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{t}{r}\right)^{2n} |\Phi(t)|^2\, dt \leq$$

$$\leq -\frac{1}{2} \log \int_r^{r+1} \left(\frac{t}{r}\right)^{2n} |\Phi(t)|^2 dt \leq -\frac{1}{2} \log \int_r^{r+1} |\Phi(t)|^2 dt \leq$$

$$\leq -\int_r^{r+1} \log |\Phi(t)|\, dt \leq \int_r^{r+1} |\log \Phi(t)|\, dt.$$

Esto es válido para cada n, por tanto

$$\int_1^{\infty} \frac{\log Tv(r)}{r^2}\, dr \leq \int_1^{\infty} \frac{dr}{r^2} \int_r^{r+1} |\log \Phi(t)|\, dt < \infty.$$

Para el recíproco supongamos que $v \in \lambda$ hace la integral convergente. Entonces, la función Φ definida por

$$\Phi^2(t) = \frac{1}{1+t^2} \quad \frac{1}{Tv^2(|t|)}$$

está en las condiciones del teorema 2. //

Resumiendo:

Teorema: Las condiciones siguientes son equivalentes

(a) la clase $D^{\lambda}(\mathbb{R})$ no es cuasianalítica.

(b) $\exists$ F holomorfa en π^+ tal que $z^n F \in H^2(\pi^+)$ y $(\|z^n F\|_2)_n \in \lambda$.

(c) existe $\Phi \geq 0$ c.p.t. tal que $t^n\Phi(t) \in L^2(\mathbb{R})$, $(\|t^n\Phi\|_2)_n \in \lambda$ y $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\log \Phi(t)|}{1+t^2}\, dt < \infty$.

(d) existe $v \in \lambda$ tal que $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\log T_V(v)}{r^2}\, dr < \infty$, donde $T_V(r) = \sup \dfrac{r^n}{v_n}$.

las clases clásicas corresponden a $\lambda = M_s h[0]$.

Entonces (d) equivale a

$$\text{(e) Si } T(r) = \sup \frac{r^n}{M_n} , \quad \int_1^{\infty} \frac{\log T(v)}{r^2} \, dr < \infty.$$

B I B L I O G R A F I A

[1] PALEY and WIENER " Fourier transforms in the complex domain" A.M.S. (Colloq. Publ., XIX)

[2] HOFFMAN, K. "Banach Spres of Analytic Functions" Prentice-Hall (Series in Modern Analysis)

[3] CUFI, J y CERDA, J.L. "Algunas clases de funciones diferenciales". Aparecerá en Collectanea.